Лекция 7

ЭРМИТОВЫ ЭЛЕМЕНТЫ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1. Кусочно-квадратичные эрмитовы элементы

В свое время (лекция 2) мы восприняли как большой успех понижение требований гладкости к искомому решению задачи (1.1), (2.21) с $C^2(I)$ или $H^2(I)$ до $H^1(I)$. Этим мы пользовались на протяжении всех последующих лекций, требуя от приближенного решения лишь непрерывности в общих для двух соседних элементов узлах. Однако, если искомое решение обладает бо́льшей, чем H^1, гладкостью, то иногда целесообразно и приближенное решение искать более гладким.

Попытаемся найти конечноэлементное решение задачи (1.1), (2.21), которое не только непрерывно, но и обладает непрерывными первыми производными. Ясно, что пространство кусочно-линейных функций для этого не подходит. Обратимся к кусочно-квадратичным функциям. Пусть*)

$$S_{2,1}^h := \{v^h(x) \in C^1(\bar{I})| \quad v^h|_{e^{(i)}} \in P_2(e^{(i)}), \quad i = 1, ..., N\}. \tag{1}$$

Размерность этого пространства

$$\dim S_{2,1}^h = 3N - 2(N-1) = N + 2.$$

*)Первый индекс в обозначении конечноэлементного пространства указывает на степень используемых многочленов, а второй на гладкость элементов этого пространства. Построенные ранее пространства S_k^h с учетом этого соглашения можно обозначать $S_{k,0}^h$.

К сожалению, в $S^h_{2,1}$ не существует базиса, элементы которого имели бы минимальный носитель, состоящий из двух соседних элементов. (Функция из $S^h_{2,1}$, с носителем на $e^{(i)} \bigcup e^{(i+1)}$ должна обращаться в нуль вместе со своей первой производной в точках x_{i-1} и x_{i+1} (4 условия), а также быть непрерывно-дифференцируемой в точке x_i (2 условия). Этим шести условиям на $e^{(i)} \bigcup e^{(i+1)}$ удовлетворяет только тождественный нуль.) Вообще же базис в $S^h_{2,1}$ конечно существует.

Легко видеть, что, например, при $N{=}2$ $(\dim S^h_{2,1} = 4)$ в качестве такового может быть взята совокупность функций $\varphi_j(x)$, $j{=}1{,}2{,}3{,}4$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(0) = 1, & \varphi_1'(0) = 0, & \varphi_1(1) = 0, & \varphi_1'(1) = 0,\\
\varphi_2(0) = 0, & \varphi_2'(0) = 1, & \varphi_2(1) = 0, & \varphi_2'(1) = 0,\\
\varphi_3(0) = 0, & \varphi_3'(0) = 0, & \varphi_3(1) = 1, & \varphi_3'(1) = 0,\\
\varphi_4(0) = 0, & \varphi_4'(0) = 0, & \varphi_4(1) = 0, & \varphi_4'(1) = 1.
\end{array} \tag{2}$$

Указанные функции изображены на рис. 1. При разложении функции $v^h(x)$ из $S^h_{2,1}$, по этому базису коэффициентами разложения будут значения самой функции и ее первой производной в точках с координатами ноль и единица. Точка с координатой 1/2 своих представителей среди коэффициентов разложения не имеет; ее роль оказалась чисто вспомогательной.

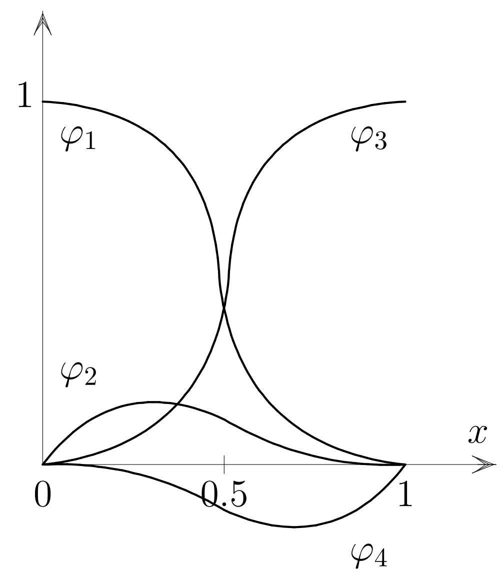

Рис. 1

Сделанные наблюдения наводят на мысль и при других N (отличных от 2) рассматривать элементы парами. Пусть N в (1) четное т.е. $N{=}2M$. Объединим элементы $e^{(i)} = [x_{i-1}, x_i]$ в суперэлементы

$$\tilde{e}^{(i)} = e^{(2i-1)} \bigcup e^{(2i)}, \quad i = 1, ..., M. \tag{3}$$

Назовем узлами суперэлементов (3) их концы, т.е. точки $x_{2i}, \quad i = 0, 1, ..., M$. В дальнейших построениях, связанных с $S^h_{2,1}$, суперэлементы (3) будут играть ту же роль, что и конечные элементы в предшествующих построениях.

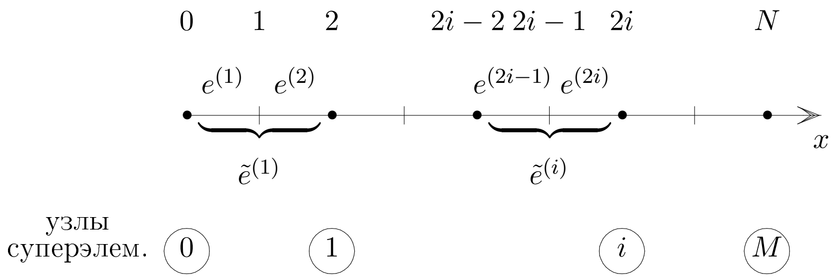

Рис. 2

Обратим внимание на то, что $\dim S^h_{2,1} = N + 2 = 2(M + 1)$ ровно в два раза превосходит число узлов суперэлементов. Это позволяет попытаться параметризовать пространство $S^h_{2,1}$ значениями функций и их первых производных в узлах суперэлементов. Тогда с каждым из узлов будет связано по две базисные функции, одна из которых имеет в этом узле единичное значение и нулевую первую производную, а в остальных узлах вместе со своей первой производной обращается в нуль. Вторая базисная функция должна обращаться в нуль во всех узлах, но иметь единичную первую производную в данном узле и нулевую во всех остальных. Такие базисные функции в самом деле существуют, ибо их задание на двух соседних суперэлементах (на носителе) определяется двенадцатью параметрами (по три на каждом из четырех элементов), которые должны удовлетворять двенадцати условиям (по два в точках $x_{2i\mp1}$, не являющихся узлами, по два в узлах с координатами $x_{2i\mp2}$ и четыре в узле x_{2i}). Поскольку в каждом узле суперэлемента задается по два параметра, будем эти узлы называть двукратными.

Итак, используя пространство $S^h_{2,1}$, при $N = 2M$ можно построить метод конечных суперэлементов с непрерывно-дифференцируемым приближенным решением. Но мы этого делать не будем. Заметим лишь, что на каждом суперэлементе приближенное решение задается четырьмя параметрами. Но именно четыре коэффициента имеет многочлен третьей степени, так что вместо $S^h_{2,1}$ можно ввести пространство

$$S^h_{3,1} = \{v^h(x) \in C^1(\bar{I})| \quad v^h(x)|_{e^{(i)}} \in P_3(e^{(i)}), \quad i = 1, ..., N\}, \tag{4}$$

размерность которого равна $2(N+1)$, и задать в нем ту же параметризацию, что и в $S^h_{2,1}$. Это приведет нас к базису, элементы которого имеют носитель, состоящий не более чем из двух соседних элементов (а не суперэлементов, как для $S^h_{2,1}$).

2. Кубические эрмитовы элементы

Воспользуемся пространством $S^h_{3,1}$ из (4) для построения конечноэлементного решения задачи (1.1), (2.21). Ограничимся построением матрицы жесткости и вектора нагрузки элемента, оставив сборку читателям. *Узлами (двукратными)* элемента назовем его концы. Функции формы на $e^{(i)}$ определим при помощи многочленов третьей степени $\varphi_k(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[0, 1]$ оси Ot условиям (2). Эти функции, как легко видеть, задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = (t-1)^2(2t+1), \qquad &&\varphi_2(t) = t(t-1)^2, \\ &\varphi_3(t) = t^2(3-2t), &&\varphi_4(t) = t^2(t-1); \end{aligned} \tag{5}$$

их вид изображен на рис. 1. Сами же функции формы определим соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}_{2l-1}(x) &= \varphi_{2l-1}\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right), \quad l = 1, 2, \\ \varphi^{(i)}_{2l}(x) &= h\varphi_{2l}\left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right), \quad l = 1, 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Нормирующий множитель h, фигурирующий в определении функций формы с четными номерами, делает их первые производные равными единице в соответствующих узлах. Элемент $e^{(i)}$ с двукратными узлами на концах и функциями формы (6), (5) называется *кубическим эрмитовым элементом* в отличие от кубического элемента с четырьмя однократными узлами, который называется *лагранжевым*. Лагранжевыми являются и ранее введенные линейные элементы с двумя однократными узлами на концах, а также квадратичные элементы, рассмотренные в предыдущей лекции. Эта терминология берет свое начало из теории интерполяции.

Обратимся к построению матрицы жесткости. Согласно (6.16)

$$K_p^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} d\varphi_1^{(i)}/dx \\ d\varphi_2^{(i)}/dx \\ d\varphi_3^{(i)}/dx \\ d\varphi_4^{(i)}/dx \end{bmatrix} p(x) \begin{bmatrix} \dfrac{d\varphi_1^{(i)}}{dx} & \dfrac{d\varphi_2^{(i)}}{dx} & \dfrac{d\varphi_3^{(i)}}{dx} & \dfrac{d\varphi_4^{(i)}}{dx} \end{bmatrix} dx.$$

Полагая здесь $p(x) = \text{const} = p, \quad x \in e^{(i)}$ и делая замену переменной интегрирования (6.17), с учетом (6), (5) будем иметь

$$\begin{aligned} K_p^{(i)} &= \frac{1}{h}\int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ h\varphi_2'(t) \\ \varphi_3'(t) \\ h\varphi_4'(t) \end{bmatrix} p[\varphi_1'(t) \quad h\varphi_2'(t) \quad \varphi_3'(t) \quad h\varphi_4'(t)]dt = \\ &= \frac{p}{h} \begin{bmatrix} 6/5 & h/10 & -6/5 & h/10 \\ h/10 & 2h^2/15 & -h/10 & -h^2/30 \\ -6/5 & -h/10 & 6/5 & -h/10 \\ h/10 & -h^2/30 & -h/10 & 2h^2/15 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно (6.20), (6), (5) при $q(x) = \text{ const} = q, \quad x \in e^{(i)}$

$$\begin{aligned} M^{(i)} &= \int\limits_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)} \\ \varphi_2^{(i)} \\ \varphi_3^{(i)} \\ \varphi_4^{(i)} \end{bmatrix} q[\varphi_1^{(i)} \quad \varphi_2^{(i)} \quad \varphi_3^{(i)} \quad \varphi_4^{(i)}]dx = \\ &= hq\int_0^1 \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ h\varphi_2 \\ \varphi_3 \\ h\varphi_4 \end{bmatrix} [\varphi_1 \quad h\varphi_2 \quad \varphi_3 \quad h\varphi_4]dt = \\ &= \frac{hq}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -4h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -4h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Напомним, что при вычислении матриц (7) и (8) полезны представления типа (6.22),(6.23) и следующие за ними рассуждения.

Матрица жесткости $K^{(i)}$ элемента определяется из (7), (8) по формуле (6.24).

Из (6.25), (6), (5) при $f(x) = \mathrm{const} = f, \quad x \in e^{(i)}$

$$F^{(i)} = hf \int_0^1 [\varphi_1 \quad h\varphi_2 \quad \varphi_3 \quad h\varphi_4]^T dt = hf[1/2 \quad h/12 \quad 1/2 \quad -h/12]^T. \tag{9}$$

3. Задача об изгибе балки

Конечноэлементное пространство $S^h_{3,1}$ из (4) оказывается пригодным и для приближенного решения дифференциальных уравнений *четвертого порядка*. Рассмотрим задачу о равновесии однородной балки постоянного сечения, находящейся под действием распределенной поперечной нагрузки и имеющей один конец заделанным, а второй свободным. Математически задача может быть сформулирована так: найти решение дифференциального уравнения

$$u^{(4)} = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{10}$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \tag{11}$$

Первые два граничных условия являются главными, вторые два — естественными. Чтобы получить вариационную формулировку задачи (10), (11), умножим уравнение (10) на функцию $v(x)$, проинтегрируем результат по отрезку $[0, 1]$ и преобразуем левую часть двукратным интегрированием по частям:

$$\int_0^1 u^{(4)} v dx = u''' v|_0^1 - u'' v'|_0^1 + \int_0^1 u'' v'' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Подстановки при $x = 1$ обращаются в нуль в силу второй пары граничных условий (11). Потребуем, чтобы $v(x)$ удовлетворяла главным граничным условиям (11), т.е. $v(0) = v'(0) = 0$. Тогда обращается в нуль подстановка и при $x = 0$, а вариационное уравнение принимает вид

$$\int_0^1 u''v''dx = \int_0^1 fvdx.$$

Пусть

$$\tilde{H}^2(I) = \{v(x) \in H^2(I) | \quad v(0) = v'(0) = 0\},$$

где $H^2(I)$ — соболевское пространство с нормой, определяемой соотношением (1.15). Тогда вариационная формулировка задачи (10), (11) будет такова:

$$u(x) \in \tilde{H}^2(I): \quad a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \tilde{H}^2(I), \tag{12}$$

где

$$a(u, v) = \int_0^1 u''v''dx, \quad l(v) = \int_0^1 fvdx.$$

Ясно, что $S_{3,1}^h \subset H^2(I)$, а

$$\tilde{S}_{3,1}^h = \left\{ v^h \in S_{3,1}^h \middle| \quad v^h(0) = \frac{dv^h}{dx}(0) = 0 \right\} \subset \tilde{H}^2(I).$$

Поэтому конечноэлементным решением задачи (12) является функция

$$u^h \in \tilde{S}_{3,1}^h \quad : \quad a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in \tilde{S}_{3,1}^h. \tag{13}$$

Матрица жесткости элемента $e^{(i)}$ для задачи (13) определяется билинейной формой

$$a^{(i)}(u^h, v^h) = \int\limits_{e^{(i)}} \frac{d^2u^h}{dx^2} \frac{d^2v^h}{dx^2} dx$$

и функциями формы (6). Имеем

$$K^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} d^2\varphi_1^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_2^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_3^{(i)}/dx^2 \\ d^2\varphi_4^{(i)}/dx^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d^2\varphi_1^{(i)}}{dx^2} & \dfrac{d^2\varphi_2^{(i)}}{dx^2} & \dfrac{d^2\varphi_3^{(i)}}{dx^2} & \dfrac{d^2\varphi_4^{(i)}}{dx^2} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_0^1 [\varphi_1'' \quad h\varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad h\varphi_4'']^T[\varphi_1'' \quad h\varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad h\varphi_4'']dt = \qquad (14)$$

$$= \frac{1}{h^3}\begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix},$$

где $\varphi_k(t)$ из (5).

Вектор нагрузки $F^{(i)}$ элемента имеет тот же вид, что и в задаче (1.1), (2.21) и при $f(x) = \mathrm{const} = f$ для $x \in e^{(i)}$ задается соотношением (9). Глобальная матрица жесткости формируется точно так же, как и в предыдущем примере, а "снятие флажков"осуществляется с учетом главных граничных условий (11).

4. Системы уравнений

В качестве завершающих примеров применения МКЭ к обыкновенным дифференциальным уравнениям рассмотрим системы уравнений.

Пример 1. Требуется найти решение системы

$$\begin{aligned} -u_1'' + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= f_1(x), \\ -u_2'' + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= f_2(x), \end{aligned} \quad 0 < x < 1, \qquad (15)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям первого рода

$$u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2(1) = 0. \qquad (16)$$

Введем векторы

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

и матрицы

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

В векторном виде система (15) запишется так:

$$\left(-I \frac{d^2}{dx^2} + A \right) \mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{19}$$

Дадим вариационную постановку задачи (15), (16). Для этого умножим уравнение (19) слева на произвольный вектор $\mathbf{v}^T = [v_1 \quad v_2]$ и результат проинтегрируем по $(0,1)$

$$\int_0^1 \mathbf{v}^T \left(-I \frac{d^2}{dx^2} + A \right) \mathbf{u} dx = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Преобразовывая теперь первое слагаемое левой части при помощи интегрирования по частям и предполагая, что $\mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, получим следующую вариационную задачу: найти

$$\mathbf{u} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I): \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^1(I),$$

где

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^1 (\mathbf{v}'^T \mathbf{u}' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}) dx,$$
$$l(\mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Будем искать приближенное решение в виде кусочно-линейных непрерывных функций, линейных на каждом элементе $e^{(i)}$. Узлами элемента будут его концы, левому из которых присвоим номер 1, а правому — номер 2. Так как система (15) содержит две компоненты, то узлы будут *двукратными*. Пусть, как обычно,

$$\boldsymbol{u}_l^{(i)} = [u_{l,1} \quad u_{l,2}]^T, \quad l = 1, 2$$

— вектор узловых значений элемента $e^{(i)}$ для компоненты $u_l^h, \quad l = 1, 2$ приближенного решения, а

$$\varphi_1^{(i)}(x) = \frac{x_i - x}{h}, \quad \varphi_2^{(i)}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h} \tag{20}$$

— функции формы, образующие матрицу

$$\boldsymbol{\varPhi}^{(i)} = [\varphi_1^{(i)} \quad \varphi_2^{(i)}].$$

Тогда

$$u_l^h = \boldsymbol{\varPhi}^{(i)} \boldsymbol{u}_l^{(i)}, \quad l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}. \tag{21}$$

Пусть

$$\boldsymbol{U}^{(i)} = [u_{1,1} \quad u_{2,1} \quad u_{1,2} \quad u_{2,2}]^T$$

— вектор узловых значений всего приближенного решения $\mathbf{u}^h$ на $e^{(i)}$. Так как

$$\boldsymbol{u}_l^{(i)} = \mathrm{S}_l \boldsymbol{U}^{(i)},$$

где

$$\mathrm{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ср. с (4.16), (4.17)), то из (21) следует, что

$$u_l^h(x) = \boldsymbol{\varPhi}^{(i)} \mathrm{S}_l \boldsymbol{U}^{(i)}, \quad l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}$$

и поэтому

$$\mathbf{u}^h(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varPhi}^{(i)} \mathrm{S}_1 \\ \boldsymbol{\varPhi}^{(i)} \mathrm{S}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{(i)} = \Phi^{(i)} \boldsymbol{U}^{(i)},$$

где

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)} & 0 & \varphi_2^{(i)} & 0 \\ 0 & \varphi_1^{(i)} & 0 & \varphi_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

— общая матрица функций формы. В силу (20)

$$\frac{d\Phi^{(i)}}{dx} = \begin{bmatrix} -1/h & 0 & 1/h & 0 \\ 0 & -1/h & 0 & 1/h \end{bmatrix}$$

и матрица жесткости $K_1^{(i)}$ элемента, отвечающая билинейной форме $\int\limits_{e^{(i)}} \mathbf{v}'^T \mathbf{u}' dx$, есть

$$K_1^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx}\right]^T \frac{d\Phi^{(i)}}{dx} dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} dt = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Билинейной же форме $\int\limits_{e^{(i)}} \mathbf{v}^{hT} A \mathbf{u}^h dx$ отвечает матрица массы

$$M^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \Phi^{(i)T} A \Phi^{(i)} dx =$$

$$= h\int_0^1 \begin{bmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1-t \\ t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & t \end{bmatrix} dt =$$

$$= h\int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)I \\ tI \end{bmatrix} A[(1-t)I \quad tI] dt = h\int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)A \\ tA \end{bmatrix} [(1-t)I \quad tI] dt =$$

$$= h\int_0^1 \begin{bmatrix} (1-t)^2 A & t(1-t)A \\ t(1-t)A & t^2 A \end{bmatrix} dt.$$

Если коэффициенты a_{ij} от x не зависят, то

$$M^{(i)} = h \begin{bmatrix} (1/3)A & (1/6)A \\ (1/6)A & (1/3)A \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes A,$$

где значком $\otimes$ обозначено тензорное произведение матриц.

Итак, матрица жесткости элемента $e^{(i)}$, есть

$$K^{(i)} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \otimes A.$$

На вычислении вектора нагрузки мы останавливаться не будем.

Пример 2. Пусть теперь система содержит уравнения разных порядков

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p_1(x)\frac{du_1}{dx}\right) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = f_1(x), \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(p_2(x)\frac{d^2u_2}{dx^2}\right) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = f_2(x), \end{aligned} \qquad 0 < x < 1, \tag{22}$$

а граничные условия остаются однородными первого рода

$$u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2'(0) = u_2(1) = u_2'(1) = 0. \tag{23}$$

Если обозначить

$$D_1 = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}$$

и принять во внимание (18), (17), то систему (22) можно записать в векторном виде

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}D_2\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}D_1\frac{d}{dx} + A\right]\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

откуда легко следует вариационная формулировка задачи (22), (23): найти

$$\mathbf{u} \in H_0^1(I) \times H_0^2(I): \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(I) \times H_0^2(I),$$

где

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_0^1 \left[\mathbf{v}''^T D_2 \mathbf{u}'' + \mathbf{v}'^T D_1 \mathbf{u}' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}\right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[p_2 v_2'' u_2'' + p_1 v_1' u_1' + \mathbf{v}^T A \mathbf{u}\right] dx, \end{aligned}$$

а

$$l(\mathbf{v}) = \int_0^1 \mathbf{v}^T \mathbf{f} dx.$$

Поскольку вторая компонента решения расположена в $H_2(I)$, то для ее приближения следует использовать по крайней мере конечноэлементное пространство $S_{3,1}^h$ из (4), в то время как для приближенного решения $u_1 \in H^1(I)$ достаточно и S_1^h из (3.8) или S_2^h из (6.1), хотя можно взять и то же пространство $S^h_{3,1}$. Вопреки здравому смыслу, связанному с соображением равноточности приближений обеих компонент решения, будем для разнообразия полагать, что $u^h_1 \in S^h_1$, а $u^h_2 \in S^h_{3,1}$.

Как и в предыдущем примере узлами конечного элемента будут его концы — левый с номером 1 и правый с номером 2. Но теперь узлы будут *трехкратными.* Пусть

$$\boldsymbol{u}^{(i)}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \end{bmatrix}^T, \qquad \boldsymbol{u}^{(i)}_2 = \begin{bmatrix} u_{2,1} & u'_{2,1} & u_{2,2} & u'_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

— векторы узловых значений элемента $e^{(i)}$ компонент u^h_l, $l = 1, 2$ приближенного решения, а

$$\varPhi^{(i)}_1 = \begin{bmatrix} \varphi^{(i)}_{1,1} & \varphi^{(i)}_{1,2} \end{bmatrix} \text{ и } \varPhi^{(i)}_2 = \begin{bmatrix} \varphi^{(i)}_{2,1} & \varphi^{(i)}_{2,2} & \varphi^{(i)}_{2,3} & \varphi^{(i)}_{2,4} \end{bmatrix}$$

— соответствующие матрицы функций формы, где $\varphi^{(i)}_{1,j}$ суть $\varphi^{(i)}_j$ из (20), а $\varphi^{(i)}_{2,j} \equiv \varphi^{(i)}_j$ из (6), (5). Тогда

$$u^h_l = \varPhi^{(i)}_l \boldsymbol{u}^{(i)}_l,\ l = 1, 2, \quad x \in e^{(i)}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{U}^{(i)} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & u'_{2,1} & u_{1,2} & u_{2,2} & u'_{2,2} \end{bmatrix}^T$$

— вектор узловых значений всего приближенного решения $\mathbf{u}^h$ на $e^{(i)}$. Тогда $\boldsymbol{u}^{(i)}_l = \mathrm{S}_l \boldsymbol{U}^{(i)}$, где

$$\mathrm{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а $u^h_l(x) = \varPhi^{(i)}_l \mathrm{S}_l \boldsymbol{U}^{(i)}$ при $x \in e^{(i)}$. Поэтому

$$\mathbf{u}^h(x) = \begin{bmatrix} \varPhi^{(i)}_1 \mathrm{S}_1 \\ \varPhi^{(i)}_2 \mathrm{S}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{U}^{(i)} = \Phi^{(i)} \boldsymbol{U}^{(i)},$$

где

$$\Phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \varphi^{(i)}_{11} & 0 & 0 & \varphi^{(i)}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^{(i)}_{21} & \varphi^{(i)}_{22} & 0 & \varphi^{(i)}_{23} & \varphi^{(i)}_{24} \end{bmatrix}$$

— общая матрица функций формы. Наконец, находим матрицу жесткости элемента

$$K^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} \left\{ \left[\frac{d^2\Phi^{(i)}}{dx^2}\right]^T D_2 \, \frac{d^2\Phi^{(i)}}{dx^2} + \left[\frac{d\Phi^{(i)}}{dx}\right]^T D_1 \frac{d\Phi^{(i)}}{dx} + \right.$$
$$\left. + \, \Phi^{(i)T} A \Phi^{(i)} \right\} dx = K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + K_3^{(i)},$$

где

$$K_1^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} p_2(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi_{21}'')^2 & \varphi_{22}''\varphi_{21}'' & 0 & \varphi_{23}''\varphi_{21}'' & \varphi_{24}''\varphi_{21}'' \\ 0 & \varphi_{21}''\varphi_{22}'' & (\varphi_{22}'')^2 & 0 & \varphi_{23}''\varphi_{22}'' & \varphi_{24}''\varphi_{22}'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{21}''\varphi_{23}'' & \varphi_{22}''\varphi_{23}'' & 0 & (\varphi_{23}'')^2 & \varphi_{24}''\varphi_{23}'' \\ 0 & \varphi_{21}''\varphi_{24}'' & \varphi_{22}''\varphi_{24}'' & 0 & \varphi_{23}''\varphi_{24}'' & (\varphi_{24}'')^2 \end{bmatrix} dx,$$

$$K_2^{(i)} = \int\limits_{e^{(i)}} p_1(x) \begin{bmatrix} (\varphi_{11}')^2 & 0 & 0 & \varphi_{12}'\varphi_{11}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{11}'\varphi_{12}' & 0 & 0 & (\varphi_{12}')^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

и т.д.

5. Упражнения

1. Построить матрицы (7), (8) и (14), используя представления типа (6.22), (6.23) и следующие за ними рассуждения.

2. Построить вектор нагрузки элемента для задачи из примера 1.